a

Dzielenie

Idzie nam całkiem nieźle. Dzielenie jest ostatnim z czterech podstawowych działań matematyki. Brzmi dumnie. Matematyczna idea dzielenia nieco trąci socjalizmem, zakłada bowiem, że należy wszystkim dawać po równo.

Ciocia i jej cukierki

Intuicje

Dana jest ciocia. Ciocia ma czterech siostrzeńców: Maciusia, Michasia, Krzysia i Onufrego oraz paczkę dwudziestu cukierków, które przytachała z wyjazdu do Zimbabwe.

Po entuzjastycznym przywitaniu ciocia zaczyna częstować cukierkami: Maciuś dostał 6 cukierków, Michaś dostał 6 cukierków, Krzyś dostał 6 cukierków, a Onufry dostał 2 cukierki.

Maciuś Michaś Krzyś Onufry

Pytanie brzmi: dlaczego Onufremu jest smutno? Pomijając fakt, że może martwić się swoim imieniem, ma prawo poczuć się ofiarą niesprawiedliwości ze strony cioci. Można było przecież rozdać cukierki inaczej – każdy mógł dostać 5 cukierków.

Maciuś Michaś Krzyś Onufry

I wszyscy byliby szczęśliwi. Niestety, Onufry ma w życiu ciężko.

Rozdawanie cukierków tak, by każdy dostał tyle samo, oddaje istotę dzielenia. Podzielenie 20 cukierków na 4 równe grupy daje 5 cukierków na każdą grupę. Matematyk ujmie to tak:

Symbol : czytamy jako „podzielić na”, ewentualnie „dzielone przez”. Oznacza on, że jedną liczbę chcemy rozłożyć na kilka mniejszych liczb; po jego lewej stronie występuje liczba, którą chcemy rozdzielić, a po prawej stronie jest informacja, na ile liczb będziemy rozkładać. Jeżeli ktoś ma przeciwwskazania wobec używania dwukropka, może też stosować zapis

lub

Weźmy stertę 12 kamieni[[1]](#footnote-1). Wychodzimy z szalonym pomysłem, by dzielić tę stertę na mniejsze grupki.

* Dzieląc 12 kamieni na 2 równe grupy, dostajemy 6 kamieni w grupie.
* Dzieląc 12 kamieni na 3 równe grupy, dostajemy 4 kamienie w grupie.

12 : 3 = 4

* Dzieląc 12 kamieni na 4 równe grupy, dostajemy 3 kamienie w grupie.

Umiejętność dzielenia bywa bardzo przydatna:

* Pan Janusz ma 2 jajka[[2]](#footnote-2) i chce z nich przyrządzić 2 omlety. W takim razie musi zużyć jedno jajko na jeden omlet.
* Stefan przygotował 30 zł na wydatki w pijalni[[3]](#footnote-3). Pojedyncza degustacja kosztuje 6 zł. W takim razie Stefan może cieszyć się degustacją 5 razy.
* Żona pana Janusza ugotowała dla gości 15 ziemniaków i 6 golonek. Na obiad przyszły 3 osoby. Każda dostała 5 ziemniaków i 2 golonki.
* Biegacz przebył 5 okrążeń boiska w ciągu godziny. Jeśli biegł w równym tempie, przebiegał jedno okrążenie w ciągu 12 minut

Nazewnictwo

Intuicje

Liczbę, którą dzielimy (po lewej znaku : ), nazywamy *dzielną*. Liczbę, przez którą dzielimy (po prawej znaku : ), nazywamy *dzielnikiem*. Wynik dzielenia to *iloraz*.

Widzimy tu pewne podobieństwo do formułki odejmowania, w której najpierw występowała odjemna, a potem odjemnik. Jak widać, nawet w matematyce kobiety mają pierwszeństwo.

* W działaniu dzielną jest 16, dzielnikiem 2, a wynikiem (ilorazem) 8.
* W działaniu dzielną jest 9, dzielnikiem 3, a wynikiem (ilorazem) 3.
* W działaniu dzielną jest 14, dzielnikiem 2, a wynikiem (ilorazem) 7.

Dzielenie jako odwrotność mnożenia

Intuicje

Wróćmy do rozkładania 12 kamieni na grupy. Za każdym razem po pogrupowaniu kamieni możemy stwierdzić, że wszystkie razem dają wyjściowe 12 kamieni.

Z drugiej strony lub inaczej

Jednocześnie , czyli

Przy okazji , więc

Dzielenie jest odwrotne do mnożenia. Gdy chcemy poznać wynik dzielenia, np. , możemy zadać sobie pytanie: przez co należy pomnożyć 7, aby otrzymać 28? Stwierdzimy, że odpowiedzią jest 4.

Mam dylemat: przemienność oznaczyłem jako temat rozszerzony, a tu pojawia się normalnie

Z przemienności mnożenia wynika ponadto ciekawa zależność. Skoro

oraz ,

to

oraz

Tak samo będzie dla dowolnych dwóch liczb.

Dzielenie przez zero

Intuicje

Po powrocie z Seulu ciocia przywiozła tyle cukierków, że Maciuś, Michaś, Krzyś i Onufry nie byli w stanie ich zjeść. Każdy z nich postanowił rozdać 18 cukierków pomiędzy swoich przyjaciół.

* Maciuś ma trzech przyjaciół, więc każdy z nich dostał 6 cukierków.
* Michaś ma dwóch przyjaciół, więc każdy z nich dostał 9 cukierków.
* Krzyś ma jednego przyjaciela, więc oddał mu wszystkie 18 cukierków.
* Onufry nie ma przyjaciół. W takim razie…

mamy problem[[4]](#footnote-4)… Ile cukierków powinien dostać każdy z jego przyjaciół, jeśli nie ma przyjaciół? Nie ma osoby, której można by te cukierki podarować. W takim razie nie ma nawet mowy o dzieleniu. Gdybyśmy napisali

to popełnilibyśmy śmiertelny grzech matematyczny[[5]](#footnote-5). Wreszcie przyłapaliśmy matematykę na czymś, czego nie potrafi – matematyka nie daje sposobu, żeby podzielić przez 0. Jest to dosłownie niemożliwe.

Ma to nawet sens uwzględniając, że dzielenie jest odwrotne do mnożenia:

* , ponieważ .
* , ponieważ .
* , ponieważ .
* nie ma wartości, ponieważ .

Nie możemy znaleźć liczby, która pomnożona przez 0 daje 18. Iloczyn zera i dowolnej liczby zawsze wynosi 0.

Dzielenia przez 0 należy unikać jak ognia. Prawdopodobnie jeszcze nie raz się sparzysz.

Dzielenie z resztą

Intuicje

Pora na małe wyjaśnienie. We wszystkich przykładach do tej pory specjalnie dobraliśmy takie liczby, żeby „udało” nam się wykonać dzielenie. A teraz niespodzianka – spróbujmy wykonać dzielenie . Chcielibyśmy rozłożyć 7 kamieni na 3 równe sterty… i coś nam nie wychodzi. Rozłożymy po dwa kamienie na jedną stertę i zostaje nam jeden złośliwy kamień, z którym nie mamy co zrobić.

Moglibyśmy rozłupać go na trzy mniejsze kamienie równej wielkości, ale przecież nie jesteśmy barbarzyńcami. W takiej sytuacji mówimy, że została nam *reszta*. Zapiszemy to w taki sposób:

Czyli „7 podzielić na 3 to 2, reszta 1”.

* Pan Janusz ma 4 jajka, a na jajecznicę potrzebuje 3 jajek. Zostanie mu jedno.
* Stefan zabrał 27 zł do pijalni. Jeden kufel[[6]](#footnote-6) kosztuje 6 zł, więc po czterokrotnej degustacji zostało mu 3 zł na napiwek.
* Żona pana Janusza przygotowała 8 golonek dla 4 gości. Po ostatnim obiedzie jeden z nich się pochorował, więc tym razem przyszło tylko 3 gości. Każdy dostał po dwie. Zostały dwie golonki, którymi zajął się pan Janusz.

Własności dzielenia

Rozszerzenie

Co do tego, że dzielenie nie jest przemienne, raczej nie ma zastrzeżeń. Dać 14 dzieciom 2 cukierki do zjedzenia, to nie to samo[[7]](#footnote-7), co dać 2 dzieciom 14 cukierków.

Jeśli chodzi o łączność dzielenia, rozważmy przykład . Licząc na dwa sposoby:

Wyniki są dość różne, więc dzielenie nie jest łączne.

Dzielenie w słupku

Warsztat

W przypadku małych liczb warto mieć na uwadze, że dzielenie jest odwrotnością mnożenia. Zawsze w razie problemów warto zastąpić sobie dzielenie odpowiednim mnożeniem, można nawet wspomóc się tabliczką mnożenia. Jeśli chcemy znaleźć wynik , szukamy kolumny zatytułowanej „8” i szukamy w niej wyniku 72. Wynik występuje w wierszu „9”, w takim razie , więc .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| **5** | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| **6** | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| **7** | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| **8** | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| **9** | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Zapewne zdążyłeś już polubić działania w słupku. Oto ich kwintesencja – *dzielenie w słupku* (czyli *dzielenie pisemne*). Spróbujmy podzielić . Zapewne spodziewasz się, że zapiszemy obie liczby jedna pod drugą i podkreślimy je. Otóż nie. Piszemy je jedna obok drugiej i rysujemy kreskę nad obydwiema. Wynik będziemy pisać ponad kreską.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 4 | 6 | 8 | : | 2 |

Teraz zaczynamy analizować liczbę, którą dzielimy, zaczynając od lewej. Bierzemy cyfrę 4 i próbujemy podzielić ją przez 2. Udało nam się – . Wynik zapisujemy nad dwójką.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 |  |  |  |  |
| 4 | 6 | 8 | : | 2 |

Teraz robimy coś odwrotnego – mnożymy otrzymane 2 przez dzielnik, czyli przez 2. Otrzymujemy 4 i zapisujemy je pod cyfrą setek dzielnej.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 |  |  |  |  |
| 4 | 6 | 8 | : | 2 |
| 4 |  |  |  |  |

W tym momencie odejmujemy zapisaną czwórkę od wyjściowej czwórki. Dostaliśmy 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 |  |  |  |  |
|  | 4 | 6 | 8 | : | 2 |
| - | 4 |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  |  |

Z dzielnej przepisujemy kolejną cyfrę, czyli 6.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 |  |  |  |  |
|  | 4 | 6 | 8 | : | 2 |
| - | 4 |  |  |  |  |
|  | 0 | 6 |  |  |  |

Teraz powtarzamy serię czynności. Dzielimy 6 przez 2. Dostajemy 3. Zapisujemy wynik nad kreską i robimy działanie odwrotne – mnożymy go przez dzielnik i piszemy 6 na dole.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 |  |  |  |
|  | 4 | 6 | 8 | : | 2 |
| - | 4 |  |  |  |  |
|  | 0 | 6 |  |  |  |
|  |  | 6 |  |  |  |

Odejmujemy i dostajemy 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 |  |  |  |
|  | 4 | 6 | 8 | : | 2 |
| - | 4 |  |  |  |  |
|  | 0 | 6 |  |  |  |
| - |  | 6 |  |  |  |
|  |  | 0 |  |  |  |

Przepisujemy 8 i powtarzamy czynności. ; ; .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 |  |  |
|  | 4 | 6 | 8 | : | 2 |
| - | 4 |  |  |  |  |
|  | 0 | 6 |  |  |  |
| - |  | 6 |  |  |  |
|  |  | 0 | 8 |  |  |
| - |  |  | 8 |  |  |
|  |  |  | 0 |  |  |

Nie mamy już czego przepisać, więc zakończyliśmy męki. Otrzymaliśmy wynik 234. Tym razem było nudno, bo wszystkie cyfry ładnie podzieliły się przez 2. Zróbmy coś brawurowego – obliczmy

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 5 | 7 | 2 | 4 | : | 4 |

Bierzemy pierwszą cyfrę z lewej, czyli 5. Dzielimy . W tym momencie reszta nas nie interesuje. Kontynuujemy działanie – piszemy wynik 1, mnożymy i odejmujemy.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 7 | 2 | 4 | : | 4 |
| - | 4 |  |  |  |  |  |
|  | 1 |  |  |  |  |  |

Przepisujemy kolejną cyfrę, czyli 7. Teraz mamy do podzielenia liczbę dwucyfrową. . Ignorujemy resztę i piszemy 4 jako wynik. Mnożymy i odejmujemy.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 |  |  |  |  |
|  | 5 | 7 | 2 | 4 | : | 4 |
| - | 4 |  |  |  |  |  |
|  | 1 | 7 |  |  |  |  |
| - | 1 | 6 |  |  |  |  |
|  |  | 1 |  |  |  |  |

Przepisujemy kolejną cyfrę, czyli 2. Dzielimy . Piszemy 3 nad kreską, mnożymy i odejmujemy.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 | 3 |  |  |  |
|  | 5 | 7 | 2 | 4 | : | 4 |
| - | 4 |  |  |  |  |  |
|  | 1 | 7 |  |  |  |  |
| - | 1 | 6 |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 2 |  |  |  |
| - |  | 1 | 2 |  |  |  |
|  |  |  | 0 |  |  |  |

Przepisujemy 4, dzielimy , mnożymy , odejmujemy .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 | 3 | 1 |  |  |
|  | 5 | 7 | 2 | 4 | : | 4 |
| - | 4 |  |  |  |  |  |
|  | 1 | 7 |  |  |  |  |
| - | 1 | 6 |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 2 |  |  |  |
| - |  | 1 | 2 |  |  |  |
|  |  |  | 0 | 4 |  |  |
|  |  |  |  | 4 |  |  |
|  |  |  |  | 0 |  |  |

Kończymy robotę i odczytujemy wynik 1431. Jeśli to było brawurowe, to teraz będziemy dzielić jak szaleni –

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 3 | 6 | 8 | 4 | : | 2 | 8 |

Zabieramy się za dzielną od lewej. Chcielibyśmy podzielić, jednak takie dzielenie nie ma wiele sensu. Lepiej rozważmy dwie pierwsze cyfry dzielnej, czyli 33. Dzielimy . Piszemy wynik, czyli 1, nad drugą trójką. Potem mnożymy i odejmujemy .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |  |  |  |  |  |
|  | 3 | 3 | 6 | 8 | 4 | : | 2 | 8 |
| - | 2 | 8 |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 5 |  |  |  |  |  |  |

Przepisujemy kolejną cyfrę, czyli 6. Dzielimy , mnożymy i odejmujemy .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 | 2 |  |  |  |  |  |
|  | 3 | 3 | 6 | 8 | 4 | : | 2 | 8 |
| - | 2 | 8 |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 5 | 6 |  |  |  |  |  |
| - |  | 5 | 6 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 0 |  |  |  |  |  |

Przepisujemy kolejną cyfrę, czyli 8. Dostajemy . Piszemy wynik 0, mnożymy , odejmujemy .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 | 2 | 0 |  |  |  |  |
|  | 3 | 3 | 6 | 8 | 4 | : | 2 | 8 |
| - | 2 | 8 |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 5 | 6 |  |  |  |  |  |
| - |  | 5 | 6 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 0 | 8 |  |  |  |  |
| - |  |  |  | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 8 |  |  |  |  |

Spisujemy czwórkę, dzielimy , mnożymy , odejmujemy .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 | 2 | 0 | 3 |  |  |  |
|  | 3 | 3 | 6 | 8 | 4 | : | 2 | 8 |
| - | 2 | 8 |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 5 | 6 |  |  |  |  |  |
| - |  | 5 | 6 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 0 | 8 |  |  |  |  |
| - |  |  |  | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 8 | 4 |  |  |  |
| - |  |  |  | 8 | 4 |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 0 |  |  |  |

Jakoś poszło. Jak widać, dzielenie w słupku wymaga wykonania w pamięci niektórych działań, nawet tych trudnych. Na koniec musieliśmy podzielić i słupek w żaden sposób nam w tym nie pomógł. Możemy jedynie siłować ; , w takim razie , czyli . Na deser podzielmy jeszcze 102 przez 9.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 2 | : | 9 |

Dzielenie 1 : 9 jest bez sensu, więc bierzemy pierwsze dwie cyfry i dzielimy – .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |  |  |
|  | 1 | 0 | 2 | : | 9 |
| - |  | 9 |  |  |  |
|  |  | 1 |  |  |  |

Spisujemy 2 i dzielimy dalej.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 | 1 |  |  |
|  | 1 | 0 | 2 | : | 9 |
| - |  | 9 |  |  |  |
|  |  | 1 | 2 |  |  |
| - |  |  | 9 |  |  |
|  |  |  | 3 |  |  |

Niespodzianka – nie mamy już żadnej cyfry do spisania, a zostało nam jakieś . Oznacza to, że jest resztą z dzielenia 102 przez 9, czyli

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 | 1 | r. | 3 |
|  | 1 | 0 | 2 | : | 9 |
| - |  | 9 |  |  |  |
|  |  | 1 | 2 |  |  |
| - |  |  | 9 |  |  |
|  |  |  | 3 |  |  |

Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Kolejność wykonywania działań]

Spróbujmy uchwycić istotę dzielenia w słupku. Weźmy dzielenie . Najpierw badamy rząd tysięcy, czyli patrzymy na 33 w liczbie 33684. Stwierdzamy, że w 33 liczba 28 mieści się raz, więc w 33 000 liczba 28 mieści się 1000 razy

Teraz rozpatrujemy rząd setek. Stwierdzamy, że w 56 liczba 28 mieści się 2 razy, więc w 5600 mieści się 200 razy

Rozpatrujemy rząd jedności. W 84 liczba 28 mieści się 3 razy.

W rezultacie , czyli . Jeśli ciągle nie czujesz się przekonany, możesz spojrzeć na dowód.

Dowód

[wymagana znajomość tematu: Algebra]

Poważnie nie wiem czy damy radę…

1. Jeśli nie pałasz sympatią do kamieni, weź stertę cukierków, kulek, owiec albo apostołów. [↑](#footnote-ref-1)
2. Jak Pan Bóg przykazał. [↑](#footnote-ref-2)
3. czekolady [↑](#footnote-ref-3)
4. Nie martw się. Onufry ma więcej problemów. [↑](#footnote-ref-4)
5. Naprawdę śmiertelny. Nawet nie próbuj. [↑](#footnote-ref-5)
6. czekolady [↑](#footnote-ref-6)
7. Co dać 14 cukierkom 2 dzieci do zjedzenia [↑](#footnote-ref-7)